

-155-

Bemerkungen: 1) oft gemachter Fehlschluss "

" $A \subset X$ nicht offen $\Rightarrow A$ abgeschlossen "

M. a. W.: "abgeschlossen" ist nicht das Gegen-
teil von "offen" !

Z.B. : $\begin{cases} \mathbb{R} := X, \quad d(x, y) := |x - y|, \\ A := [0, 1) \text{ weder offen noch abge-} \\ \text{schlossen.} \end{cases}$

10^{ter} Termin

2.) Offene Mengen in $\mathbb{R}^n$

Erinnerung: $\|x\|_{\infty} := \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \}$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

für Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$,

wobei für $n = 1$ „alles“ gleich $|x|$ ist

beachte:

$$\|x\|_{\infty} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\left(n \cdot \max \{ |x_i|^p : i=1, \dots, n \} \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow : \quad \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_{\infty} \quad (*)$$

$$\forall 1 \leq p < \infty$$

$$\text{Sei } B_r^p(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_p < r \}$$

für $1 \leq p \leq \infty$. Dann liefert $(*)$:

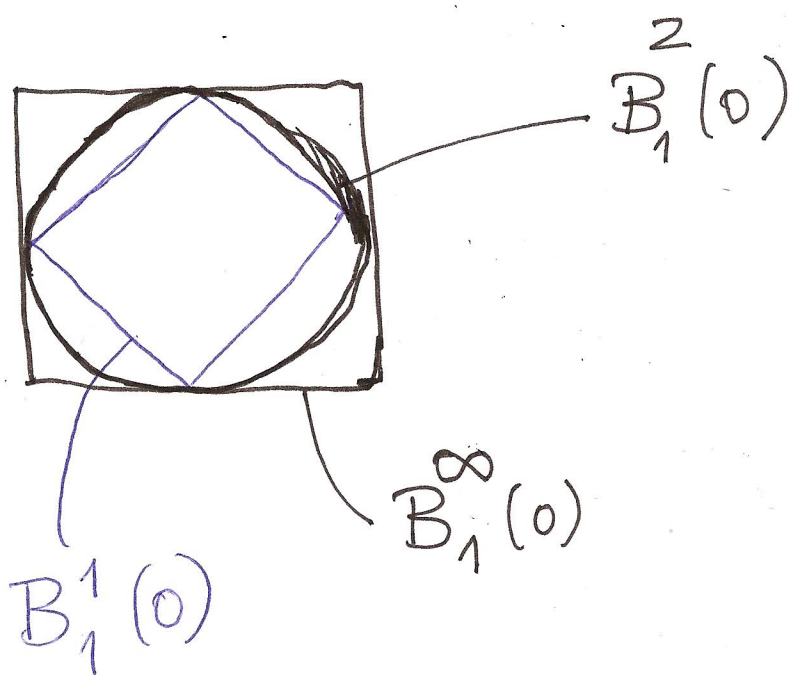
Lemma:

$$B_{r/n^{1/p}}^{\infty}(x_0) \subset B_r^p(x_0) \subset B_r^{\infty}(x_0)$$

Korollar : Jede der Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^n$
liefert dieselben offenen Mengen.

(„Die Topologien sind gleich.“)

Nur für $p=2$ („Euklidische Norm“)
ist $B_r^p(x)$ die übliche runde Kugel:



Bsple : Nachfolgend wählen ^{wir} irgendeine
 p -Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, also den Absolut-
betrag für $n=1$. vgl. Korollar!

1) $[a, b]$ abgeschlossen, (a, b) offen,

ebenso (a, ∞) , $(-\infty, b)$;

$(a, b]$ weder offen noch abgeschlossen

2) Quader in $\mathbb{R}^n$: Seien $a_i < b_i, i=1, \dots, n$.

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (a_i, b_i), i = 1, \dots, n \right\}$$

offen

$$R := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, n \right\}$$

abgeschlossen

□

Def 16.5: Sei $A \subset X$.

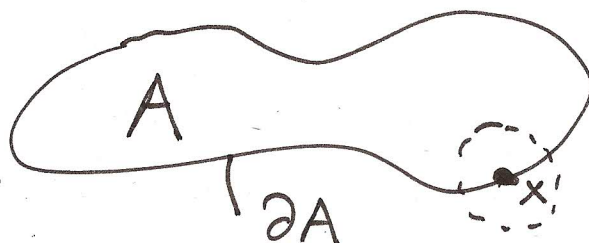
a) $x \in X$ heißt ein **Randpunkt** von A
 $:\iff$ für jede Umgebung U von x

ist $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \neq \mathcal{U} \cap (X-A)$ - 159 -

(alternativ: für jede Kugel $B_r(x)$ )

("Jede Umgebung von ~~x~~^x enthält sowohl Punkte aus A als auch aus $X-A$ ")

b) $\partial A :=$ Rand von $A :=$ Menge aller Randpunkte von A



SATZ 16.2 : a) $A - \partial A$ **offen**

b) $A \cup \partial A$ **abgeschlossen**

c) ∂A **abgeschlossen**.

(für beliebige Mengen A im metrischen Raum (X, d))

Beweis: a) Sei $x \in A - \partial A$

-150-

$\Rightarrow x$ kein Randpunkt

$\stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} \exists B_\varepsilon(x)$ mit

① $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ oder

② $B_\varepsilon(x) \cap (X - A) = \emptyset$

Gemäß $x \in A$ geht ① nicht $\Rightarrow$ ②

③ $B_\varepsilon(x) \subset A$

Wir müssen zeigen: statt ③ gilt
stärker

④ $B_\varepsilon(x) \subset A - \partial A$

Wäre $B_\varepsilon(x) \cap \partial A \neq \emptyset$,

z.B. $y \in \partial A \cap B_\varepsilon(x)$, so ist

$B_\varepsilon(x)$ Umgebung des Randpunktes y ,

enthält also per Def. auch Punkte
aus $X-A$, Wspr. zu ③!

Also gilt ④, $A - \partial A$ ist offen.

b) Sei $A^* := X-A$. Symmetrie
in der Def. von " ∂ " bzgl. A und $X-A$

$$\Rightarrow \partial A^* = \partial A; \quad \begin{array}{l} \text{a)} \Rightarrow \\ \text{Def} \Rightarrow \end{array}$$

$A^* - \partial A^*$ offen

$X - (A^* - \partial A^*)$ abgeschlossen

rechne nach:

$$X - (A^* - \partial A^*) = (X - A^*) \cup \partial A^* =$$

$$A \cup \partial A^* = A \cup \partial A$$

c) "Formel" für ∂A :

$$\partial A = (A \cup \partial A) - (A - \partial A) \Rightarrow$$

$$X - \partial A = \underbrace{(X - [A \cup \partial A])}_{\text{offen nach b)}} \cup \underbrace{(A - \partial A)}_{\text{offen nach a)}}$$

$\Rightarrow X - \partial A$ offen $\Rightarrow \partial A$ abgeschlossen



Notation: Sei $A \subset X$.

$$\overset{\circ}{A} := \text{int}(A) := A - \partial A$$

"interior"

// das Innere // oder der // innere Kern //
von A

$$\overline{A} := \underset{\substack{\text{"closure"} \\ \text{"}}}{cl(A)} := A \cup \partial A$$

// der Abschluss // oder die // abgeschlossene //
Hülle von A //

$$\text{Bspl : } \mathcal{B} := \mathcal{B}_r^n(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}$$

$$\Rightarrow : \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\mathcal{B}} = \mathcal{B}, \\ \overline{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \leq r\}, \\ \partial \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| = r\} \end{array} \right.$$

Ausblick :

Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine Topologie auf X , falls

$$(i) \quad \emptyset, X \in \mathcal{T}$$

$$(ii) \quad U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$$

$$(iii) \quad (U_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ beliebige Familie} \\ \text{in } \mathcal{T} \implies \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

$(X, \mathcal{T}) :=$ topologischer Raum;

Elemente von $\mathcal{T} :=$ offene Mengen;

$V \subset X$ heißt Umggebung von $x \in X$,

falls es ein $U \in \mathcal{T}$ gibt mit

$$x \in U \subset V;$$

- metrische Räume (X, d) induzieren
in kanonischer Weise topologische
Räume $(X, \mathcal{T}_d)$

- nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar

Details: Spezialvorlesung "Topologie"

Konvergenz in metrischen Räumen

Def 16.6 : Sei (X, d) metrischer Raum.

Eine Folge $x_k \in X$ konvergiert gegen

$x \in X$, falls eine der folgenden

äquivalenten Bedingungen ist :
erfüllt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon :$$

$$x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

(iii) zu jeder Umgebung $\mathcal{U}$ von x
gibt es $N_{\mathcal{U}} \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in \mathcal{U} \quad \forall n \geq N_{\mathcal{U}}.$$

Bem : man schreibt wie früher

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

und beachtet: **falls** ein Limes existiert,
so ist er eindeutig (Δ -Ungl. !)

$$d(x, \bar{x}) \leq d(x, x_n) + d(x_n, \bar{x})$$

Im $\mathbb{R}^n$ gilt

Satz 16.3 : Seien $x_k, x \in \mathbb{R}^n$.

Dann sind äquivalent:

(i) $\|x_k - x\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, für ein $p \geq 1$

(ii) $\text{---} \parallel \text{---}$ alle

(iii) jede Komponentenfolge $\{x_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$
 $i = 1, \dots, n$, konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen x^i

Beweis : (i) $\iff$ (ii)

benutze

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_p \leq n^{1/p} \|\cdot\|_\infty$$

$$\forall 1 \leq p < \infty$$

$$\| \quad (i i i) \iff \underline{(i)} \text{ mit } \underline{p=1} : \|$$

$$\textcircled{n=2}$$

$$x_k = (u_k, v_k)$$

$$x = (u, v)$$

$$\Rightarrow \|x - x_k\|_1 = |u_k - u| + |v_k - v|$$

Daraus liest man alles ab:

(iii) $\implies$ (i)

Komponentenweise Konvergenz ergibt

Konvergenz $\|x_k - x\|_{\infty} \longrightarrow 0$

(ii) $\implies$ (iii)

wähle $p = \infty$; dann impliziert

$\|x_k - x\|_{\infty} \longrightarrow 0$ die Konvergenz der

einzelnen Komponenten



Satz 16.4 : Sei A Teilmenge des metrischen Raumes (X, d) . Dann gilt:

A abgeschlossen $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ist } (x_n) \text{ konvergent mit Gliedern aus } \\ \text{ } \underline{A}, \text{ so folgt} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A \end{array} \right.$